CB 16

UNA PROPUESTA PARA TRABAJAR CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS EN LA ESCUELA SECUNDARIA PRIORIZANDO LA VALIDACIÓN

Ana L. CARBÓ, Ana M. MÁNTICA

Facultad de Humanidades y Ciencias - Universidad Nacional del Litoral - Argentina
analauracarbo@hotmail.com amantica@fhuc.unl.edu.ar

Nivel Educativo: Educación Polimodal (Nivel Medio).

Palabras Clave: Geometría, congruencia de triángulos, conjetura, validación, prueba.

RESUMEN

En la actualidad se puede observar en las aulas, en libros de textos y en los diseños curriculares una marcada ausencia de toda actividad relacionada con la demostración y los procesos de validar y argumentar producciones matemáticas, esta es una de las razones por la que los alumnos tienen grandes dificultades para tales actividades.

Por esto creemos que es fundamental que el alumno desde los primeros años de escolaridad tenga la posibilidad de explorar, conjeturar, ajustar, argumentar.

En este marco presentamos una propuesta donde se plantean actividades en las que el alumno pueda desarrollar la habilidad para validar sus procedimientos.

Debido a que la geometría es un buen lugar para promover este tipo de actividades la propuesta apunta a trabajar los criterios de congruencia de triángulos y se implementará en un primer año de una escuela pública de la ciudad de Santa Fe.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo presentamos una propuesta didáctica para trabajar los criterios de congruencia de triángulos. Lo que se pretende analizar al implementar la secuencia es la producción de conjeturas y el modo de validar que tienen los alumnos de la escuela secundaria. Se llevará a cabo en un primer año de una escuela pública de la ciudad de Santa Fe.

La geometría es un buen lugar para que los alumnos se vinculen con una manera específica de producir y validar relaciones. Broitman e Itzcovich (2008) consideran que “tanto en el momento de presentar una demostración como en el de gestionar la producción de demostraciones en la clase por parte de los alumnos surgen numerosos interrogantes producto de tener que considerar las posibilidades de sus alumnos simultáneamente con una manera de desplegar el conocimiento matemático en la clase que resulte satisfactoria desde el punto de vista de sus propias exigencias de rigor” (41).

Se trata que los alumnos expliquen por qué valen ciertas propiedades más allá de lo “visible”. ”El alumno no sólo tiene que comunicar una información sino que también tiene que afirmar que lo que dice es verdadero en un sistema determinado, sostener su opinión o presentar una demostración” (Brousseau, 2007: 23). Este autor sostiene que en este tipo de situación, “los alumnos organizan enunciados en demostración, construyen teorías y aprenden cómo convencer a los demás o cómo dejarse convencer sin ceder ni a argumentos retóricos, ni a la autoridad". Serán las propiedades las que permitan determinar el número de soluciones de la situación planteada.

Acordamos con lo que Sowder y Harel (1998), entienden por indagar: "proceso que un individuo emplea para eliminar sus propias dudas sobre la veracidad de una información" y por persuadir: "proceso que un individuo emplea para eliminar las dudas de otros sobre la veracidad de una información". Estos autores sostienen que "el esquema de demostración para una persona es lo que constituye indagar y persuadir para esa persona" (244).

Actualmente en los diseños curriculares y libros de texto de matemática de la mayoría de los niveles educativos la actividad referente a la demostración es escasa o hasta nula (Camargo, 2005). Considerando la demostración como medio de descubrimiento, comunicación, explicación y sistematización de los resultados, sostiene que a ésta le debería corresponder un papel protagónico en la enseñanza, en diversos cursos de matemática.

ANTECEDENTES CONSULTADOS

En función del análisis que se pretende realizar explicitaremos lo estudiado por algunos autores que abordan la temática de producir y validar relaciones.

Villella (2001) sostiene que, en la clase de geometría, habitualmente, "… *el uso de la demostración para justificar la validez de una propiedad, suele ser confundida por los alumnos y también por algunos docentes, con la enunciación o la representación gráfica de ejemplos que la verifican*" (186). En este sentido, consideramos que aprender geometría no consta únicamente de aprender definiciones, representaciones, clasificaciones de figuras y construcciones, sino también de la forma de organizar la información para que, por medio de la utilización de la lógica, pueda arribarse a la determinación de la verdad o falsedad de las proposiciones analizadas. El autor sostiene también que, aprender geometría en la escuela secundaria es un proceso que busca caracterizar el espacio, mediante propiedades formalmente validadas, a partir de la exploración del mismo.

Itzcovich (2005) afirma que, "…*las situaciones que se propongan a los alumnos con la finalidad de indagar, identificar o reconocer propiedades de las figuras deben impactar en procesos intelectuales que permitan hacer explícitas las características y propiedades de los objetos geométricos, más allá de los dibujos que utilicen para representar dichas figuras*" (18). De este modo, entendemos la importancia de que tanto el docente como los alumnos tengan en cuenta la utilidad de la construcción de una figura para poder explorar sus propiedades, aunque no para poder realizar generalizaciones a otras distintas a ella.

Hanna y Barbeau (2008) sostienen que la enseñanza de la prueba en matemática en la educación secundaria tiene el potencial de trasmitir a los estudiantes cuestiones importantes del conocimiento matemático y de brindarles una visión más amplia de su naturaleza.

Hanna y de Villiers (2008) sostienen que la prueba matemática consta de cadenas de inferencias explícitas según las normas de la deducción, y suele caracterizarse por el uso de la notación formal, sintaxis y reglas de manipulación. Sin embargo, agregan, la prueba matemática es mucho más que una secuencia de pasos correctos, es también una secuencia de ideas y puntos de vista con el objetivo de la comprensión matemática; más precisamente sostienen de la comprensión de, por qué una afirmación es verdadera. Es por eso que el reto para los educadores es fomentar el uso de la prueba matemática como un método no sólo para certificar que algo es cierto, sino también por qué es verdad.

Harel y Sowder (1998) identifican tres categorías de esquemas de demostración: los de "convicción externa" aquellos en los que se alude a una autoridad externa al propio problema (autoritarios, rituales y simbólicos), los "empíricos" cuando la justificación está formada por ejemplos (perceptivos e inductivos) y los "analíticos" cuando la justificación se basa en argumentos abstractos y deducciones lógicas (transformativos y axiomáticos).

Marradez y Gutiérrez (2000), definieron para su estudio una nueva clasificación de demostraciones que contiene a la de Harel y Sowder teniendo en cuenta las lagunas que habían detectado en ellas. Esta clasificación distingue dos grandes categorías de demostraciones: Demostraciones empíricas en las que el elemento de convicción es la verificación de la propiedad en ejemplos (empirismo naif, experimento crucial y ejemplo genérico) y demostraciones deductivas en las que el elemento de convicción son argumentos descontextualizados de ejemplos concretos y basados en propiedades generales, operaciones mentales abstractas y deducciones lógicas.

Balacheff (2000) se propone averiguar como los alumnos se convencen de la valides de lo que afirman. Distingue dos tipos de prueba, las pragmáticas que son aquellas que recurren a la acción (empirismo naif, experimento crucial y ejemplo genérico) y las intelectuales que se apoyan en formulaciones de las propiedades en juego y de sus relaciones separándose de la acción (experimento mental y cálculo sobre enunciados).

PROPUESTA DIDÁCTICA

El objetivo de un trabajo con la finalidad de la validación a partir de la construcción radicará en que los alumnos estén en presencia de un trabajo exploratorio, de ensayos y errores, de ajustes, de explicar lo que ocurre y de poder dar respuesta a las preguntas anteriormente planteadas.

En la propuesta se plantean actividades teniendo en cuenta la importancia de presentar problemas donde el alumno realice un trabajo exploratorio previo y luego elabore la conjetura; dado que esto pone en funcionamiento relaciones más complejas que probar una propiedad en la que se menciona la cuestión a demostrar (por ejemplo, probar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º) y por tanto en muchos casos el alumno no ve la necesidad de realizar la prueba, sino que lo toma como obvio. Consideramos que debe dejarse claro que una construcción no permite enunciar una propiedad general sino que admite avanzar en la búsqueda de argumentos que validan estas afirmaciones, "*…la determinación de la unicidad, existencia o infinitud de construcciones requiere de la explicitación de relaciones entre datos mediante ciertas propiedades que exceden las experiencias de dibujar*" (Itzcovich, 2005: 32). Esta cuestión debe quedar clara al alumno para que no considere que a partir de una construcción que valida su conjetura puede realizar generalizaciones.

La propuesta didáctica planteada tiene como antecedentes distintos trabajos realizados por el grupo, Carbó y Mántica (2007), Mántica y Carbó (2007), Mántica y Carbó (2009).

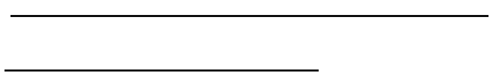
La secuencia que exponemos en este trabajo es una adaptación de la presentada por Broitman, Itzcovich (2008) en la revista 12(ntes). Enseñar Matemática. Nivel Inicial y Primario

Actividad 1

Objetivo: Enunciar la desigualdad triangular.

Problema 1

a) Dados estos dos segmentos, usando la regla no graduada y el compás, construí un triángulo:



b) Construí otro triángulo distinto al anterior con esos mismos dos lados.
c) ¿Cuántos triángulos diferentes se puede construir? ¿Por qué?

Análisis del problema 1

Teniendo en cuenta que los alumnos no trabajan en general con problemas que tengan más de una solución es probable que al encontrar un triángulo consideren resuelto el problema. En general los datos están dados y se utilizan para resolver el problema por esa razón consideramos que no es factible que consideren la posibilidad de tomar dos lados y variable el tercero. Las figuras prototípicas de triángulos son isósceles y generalmente con un lado, el que se considera como base, paralelo al borde de la hoja.

Los alumnos de Primer año tienen la noción de infinito potencial pero no la de infinito actual Por ello es previsible que consideren que se pueden construir "muchos" triángulos.

En caso de que no surjan más de una solución al problema planteado el docente podrá: Construir una circunferencia donde se fije uno de los lados y el radio de la misma sea otro; o darle dos varillas y un elástico para que los alumnos puedan observar la variación de la longitud del tercer lado.

Posibles respuestas de los alumnos:

Respecto de a)
- Construir un triángulo isósceles de lados iguales coincidente con a.
- Construir un triángulo isósceles de lados iguales coincidente con b.
- Construir un triángulo equilátero de lado a o b.
- Construir un triángulo escaleno donde dos de sus lados sean a y b.

Respecto de b)
- Construir dos triángulos isósceles de lados iguales coincidentes con a o con b.
- Construir triángulos equiláteros de lado a o b.
- Construir triángulos escálenos donde dos de sus lados sean a y b.

Respecto de c)
- Se pueden construir 2.
- Se pueden construir más de dos
- Se pueden construir muchos.

Problema 2

a) Construí, si es posible, un triángulo que tenga estos segmentos como lados. Usá el compás y la regla no graduada.

b) Construí, si es posible, un triángulo que tenga estos dos segmentos como lados. Usá el compás y la regla no graduada.

c) Construí, si es posible, un triángulo que tenga estos segmentos como lados. Usá el compás y la regla no graduada.

Análisis del problema 2

En general se considera el lado mas largo como base, ya que éste es el estereotipo que utilizan los libros de textos. El compás es un elemento no muy utilizado en la clase de geometría, por lo que es mas probable que los alumnos utilicen la regla para construir los triángulos.
En este caso, el docente podrá plantear si existe otro instrumento que no sea la regla, que permita encontrar el tercer vértice de un modo más específico que el de ensayo y error.
Por los segmentos considerados en b) puede ocurrir que los alumnos construyan el triángulo y se resistan a aceptar la imposibilidad de esta construcción, dado que habitualmente no se proponen problemas que no tienen solución, en este caso el docente podrá trabajar la imprecisión de los instrumentos de medición y acordar la no existencia del mismo.

Posibles respuestas de los alumnos:

- Dibujar primero un lado (en general el más largo) y luego ir probando con la regla hasta encontrar el tercer punto.
- Dibujar dos lados con un ángulo arbitrario y en uno de los extremos de uno de los segmentos dibujar el otro, también con un ángulo arbitrario.
- Dibujar uno de los segmentos dados y transportar sobre éste con el compás (marcando arcos de circunferencia) los restantes.
- Dibujar uno de los segmentos dados y trabajar sobre éste con el compás (marcando dos circunferencias de centro cada uno de los extremos del segmentos y de radio cada una de las longitudes de los otros dos lados)

Problema 3

a) A continuación se proponen medidas de segmentos. Decidan en cada caso si con ellas se puede o no construir un triángulo.

3 cm, 2 cm, 1 cm
8 cm, 12 cm, 5 cm
8 cm, 4 cm, 4 cm
7 cm, 1cm, 2 cm.

b) Con estos segmentos no es posible construir un triángulo: 8cm, 3cm, 2 cm. ¿Qué explicación darían de por qué no se puede?

Al finalizar esta actividad el docente institucionalizara la desigualdad triangular

Análisis del problema 3

Las razones por las que se consideran los siguientes procedimientos y las posibles intervenciones del docente son similares a las del problema anterior

Posibles respuestas de los alumnos:

- Los alumnos pueden responder utilizando los procedimientos empleados en el problema dos
- Dibujar el triángulo y concluir que no es posible realizarlo por lo acordado en el problema dos.
- Dibujar el triángulo y concluir que es posible realizarlo en todos los casos.
- Dibujar el triángulo y concluir que es posible realizarlo en el primer, segundo y tercer caso pero no en el cuarto.
- Utilizar lo acordados en la actividad anterior y fundamentar que el primero, tercero y cuarto no se pueden construir.

Las actividades que se preponen a continuación requieren redacción de mensajes para esto se convendrá lo siguiente:

✓ Los mensajes deben ser claros para que el receptor pueda interpretarlos y deben tener la información necesaria para la reproducción del triángulo.

✓ Es importante la precisión con la que se miden los lados y/o ángulos.

Actividad 2

Objetivo: que los alumnos determinen cuales son las condiciones necesarias para construir un único triángulo.

Problema

Se solicita a cada grupo que dibuje en una hoja blanca un triángulo, y que redacten un mensaje para que el grupo receptor pueda construir un triángulo igual.
Se intercambian los mensajes y se le entrega a cada grupo una hoja de papel de calcar para que realice el dibujo según las condiciones expresadas en el mensaje y luego lo devuelva al grupo emisor para que verifique si la construcción realizada es correcta. En esta instancia no se realiza ninguna restricción para la información del mensaje.

Análisis del problema

En función de trabajos anteriores podemos decir que los alumnos utilizan en los mensajes diferentes elementos del triángulo y diferentes combinaciones entre ellos

El docente deberá organizar la clase según los mensajes de los distintos grupos en función de institucionalizarlas condiciones necesarias para construir un único triángulo.

- ✓ Si se dan los tres lados. El docente institucionaliza que la solución es única.
- ✓ Si se dan dos lados y un ángulo se analiza qué ángulo se dio y cómo valida cada grupo (emisor y receptor) la elección del mismo. En este caso el docente deberá considerar qué ángulo corresponde dar para que la solución sea única y discutir las otras posibilidades. Institucionaliza que dados dos lados y el ángulo comprendido el triángulo es único
- ✓ Si se dan un lado y dos ángulos se analiza qué ángulos se dieron y si se pueden dar cualquier ángulo y se discute si la solución es única. Institucionaliza que dados un lado y dos ángulos la solución es única.
- ✓ Si se dan los tres ángulos se analizará que existen infinitas soluciones

En el caso de que en los mensajes no se proponga algunas de estas posibilidades: tres lados, dos lados y un ángulo; un lado y dos ángulos y tres ángulos, el docente planteará una actividad de modo que pueda discutirse la que falta. Por ejemplo, si todos los grupos plantean en su mensaje la longitud de los tres lados, se propondrá una actividad donde se pida redactar un mensaje donde no se pueda dar la longitud de los tres lados
Si un grupo receptor determina que los datos nos son suficientes para construir el triangulo, el docente dispondrá que soliciten al grupo emisor el o los datos que consideren que faltan para dicha construcción. Durante el trabajo grupal el docente deberá ir monitoreando el trabajo para tomar decisiones de sus intervenciones en cada grupo.

Posibles respuestas de los alumnos:

- Indiquen dos lados y el ángulo comprendido.
- Indiquen los tres lados.
- Indiquen dos lados y un ángulo (sin aclarar el ángulo que consideran)
- Indiquen que el triangulo es rectángulo y las medidas de los catetos.
- Indiquen que el triangulo es rectángulo den las medidas de dos lados.
- Indiquen un lado y un ángulo
- Indiquen un lado y dos ángulos
- Indiquen un lado y tres ángulos
- Indiquen un lado y aclaren que es equilátero
- Indiquen un lado
- Indiquen dos lados y dos ángulos
- Indiquen dos lados y tres ángulos
- Indiquen dos lados.
- Indiquen tres ángulos.
- Indiquen la posición del triángulo respecto de la hoja y cualquiera de los anteriores.

Observación: se registrara en un afiche los datos que permitieron la construcción única del triángulo según los mensajes redactados por los alumnos

Actividad 4

Objetivo: que los alumnos puedan determinar cuales son las condiciones mínimas para construir un triángulo.

Problema

Dibujar un triangulo que no sea isósceles ni acutángulo y redactar un mensaje con la menor cantidad de datos posibles para que el otro grupo pueda construir uno igual.

Análisis del problema

Consideramos que en esta actividad puede ocurrir que todos los grupos den como datos los tres lados, debido a que es lo mas fácil de medir. El uso de la regla es habitual en cambio el transportador es un instrumento que en general no es bien utilizado. El docente deberá en este caso introducir actividades que requieran el empleo del transportador.

Las condiciones del enunciado dependerán de los triángulos que hayan dibujado los alumnos en la actividad 3, por ejemplo si en la actividad anterior aparecieron triángulos obtusángulos se quitara la condición que no sea acutángulo. En función de lo realizado por los alumnos en el problema anterior se podrá proponer esta actividad de modo puedan enunciar los criterios de congruencia de triángulos. Se propondrá la condición de que no sea isósceles dependiendo de la definición, particional o jerárquica, con la que hayan trabajado previamente los alumnos ya que si la misma es particional deberá agregarse que no sea equilátero.

Posibles respuestas de los alumnos:

- Tres lados
- Dos lados y un ángulo,
- Un lado y dos ángulos.
- Dos lados y el ángulo comprendido.
- Tres ángulos
- Un lado y tres ángulos
- Tres lados tres ángulos, tres lados y un ángulo.

Observación: se registrara en un afiche los datos mínimos necesarios para construir un triángulo.

Actividad 5

Objetivo: enunciar los criterios de congruencia de triángulo.

Problema

Dibujar un triángulo cualquiera y redactar tres mensajes distintos para que otro grupo pueda construir un triángulo igual a éste.

Análisis del problema

El docente monitoreará la tarea en los diferentes grupos con el fin de retomar lo trabajado en los problemas anteriores con el objetivo de que los alumnos puedan enunciar las condiciones que permitan formular los criterios de congruencia de triángulos. En los casos que se enuncie alguna condición que no permita construir un único triángulo congruente con el dado se retomará el apropiado de los realizados en las actividades anteriores para determinar la no pertinencia del mismo.

Posibles respuestas de los alumnos:

- Redactan los mensajes teniendo en cuenta las conclusiones de las actividades anteriormente realizadas.
- Redactan los mensajes sin tener en cuenta las conclusiones de las actividades anteriormente realizadas.

- Tres lados, dos lados y un ángulo, un lado y dos ángulos.
- Tres lados, dos lados y el ángulo comprendido, un lado y dos ángulos.
- Tres lados, tres ángulos, dos lados y un ángulo
- Tres lados, tres lados y tres ángulos, tres lados y un ángulo.

Al finalizar esta actividad el docente institucionalizara los criterios de congruencia de triángulos.

ALGUNAS REFLEXIONES PARA CONTINUAR EL TRABAJO

Creemos que para que los alumnos puedan involucrarse en el trabajo de producción de demostraciones es necesario que se apropien de ciertos recursos y técnicas que son propios de los procesos de demostración en geometría. “Las técnicas van apareciendo en la medida en que constituyen recursos posibles para enfrentar los problemas. […]La reflexión sobre las demostraciones realizadas generará condiciones para que los alumnos vayan elaborando su propia “caja de herramientas” y vayan enriqueciendo sus posibilidades de ganar autonomía frente a la producción de demostraciones” (Itzcovich, 2005: 50).

Consideramos oportuno distinguir los procedimientos de formulación de conjeturas y constatación empírica, en cuanto el segundo implica la generalización o formalización de un resultado a partir de mediciones realizadas en casos particulares. Tal como plantea Itzcovich (2005), “*Este modo de proceder trae aparejada la posibilidad de que el resultado obtenido sea “una casualidad”* (…) *no hay nada que haga suponer que el resultado no hubiese podido ser otro. No se recurre a ninguna propiedad geométrica que dé cuenta de la necesariedad del resultado obtenido, ni hay certeza geométrica de que pudiera provenir de concatenar propiedades que permiten inferir tal resultado* (45 – 46).

Herbst (2009) Expresa que "hacer pruebas" es una situación que el docente de geometría tiene que gestionar. La situación "hacer una prueba" consiste en la producción de los estudiantes de un argumento (una secuencia de declaraciones y razones) que muestra cómo un conjunto de "dados" conducen a la conclusión que se les pide "probar". La verdad de las proposiciones matemáticas se confirma al demostrar que existe una prueba, el estudiante debe saber cómo deducir una declaración de las declaraciones previas.

Pretendemos analizar también las intervenciones del docente en los proceso de validación de los alumnos y cómo logra que los alumnos consigan “*…desarrollar habilidades cognitivas tales como comparar, resumir, observar, clasificar, interpretar, formular críticas, buscar suposiciones, imaginar, reunir y organizar datos, formular hipótesis, ubicarse en un dominio de ejecución y en un ámbito de conocimientos propios de la geometría dentro del entramado de la matemática y en función del currículum escolar…*” (Itzcovich, 2005: 187).

Se prevé una vez implementada la secuencia y analizada la información obtenida efectuar una categorización de las pruebas realizadas por los alumnos. Para esto se tendrá en cuenta las clasificaciones propuestas por los autores mencionados anteriormente y algunos trabajos realizados por el equipo Mántica (2006), Dal Maso y Mántica (2007), Götte y Mántica (2007), lo que permitirá, si no se ajustan a las disponibles, realizar una categorización en función de lo recogido en las observaciones y análisis de documentación de lo realizado por los alumnos del grupo seleccionado.

BIBLIOGRAFIA

Ballacheff, N. 2000. Procesos de prueba en los alumnos de matemática. (Una empresa docente. Bogotá)

Broitman,C y Itzcovich, H. 2008. "La geometría como medio para "entrar en la racionalidad". Una secuencia para la enseñanza de triángulos en la escuela primaria". *12(ntes). Enseñar Matemática. Nivel Inicial y Primario*. 4: 55 - 85.

Brousseau, G. 2007. *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. (Libros del Zorzal. Buenos Aires).

Camargo, L.; Perry, P.; Samper, C. 2005. "La demostración en la clase de Geometría: ¿Puede tener un papel protagónico?" en *Educación Matemática* Vol. 17 (3): 53 – 76. (Santillana. México D.F).

Carbó, A. y Mántica, A. 2007. "La problemática del espacio físico y el geométrico. ¿Dónde se sitúan los alumnos ingresantes al profesorado de Nivel Inicial?". En *Actas de III Congreso Nacional de Problemáticas Sociales Contemporáneas*.

Carbó, A. y Mántica, A. 2007. "Los conocimientos espaciales y geométricos de los alumnos de profesorado de Nivel Inicial y las dificultades que esto genera en el conocimiento didáctico del contenido a enseñar". Comunicación presentada en III Jornadas de Investigación en Institutos de Profesorado. "Trabajo en cátedras, docentes y políticas institucionales en Investigación".

Carbó, A. y Mántica, A. 2007. "Trabajando con los paralelogramos, aportes para la comprensión de definiciones y propiedades". Comunicación presentada en el IV CAREM. Buenos Aires.

Dal Maso M. Mántica A. 2007. "Problemas para conjeturar, demostraciones para indagar". En *Actas del IENEM*. Tandil.

Götte, M. y Mántica, A. 2007. "La problemática de las demostraciones geométricas". Comunicación presentada en el IV CAREM. Buenos Aires.

Hanna, G y de Villers, M. 2008. "ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education" en ZDM Mathematics Education 40:329–336.

Hanna, G. y Barbeau, E. 2008. "Proofs as bearers of mathematical knowledge", en *ZDM Mathematics Education* 40:345–353.

Harel G, y Sowder, L.1998. "Students´Proof Chemes". Shoenfeld, A., Kaput, J. and Dubisnsky; e. (Eds), *Research in College Mathematics Education III*. American Mathematical Society. 234-283.

Herbst, P. 2009 "Testing a Model for the Situation of "Doing Proofs".Using Animations of Classroom Scenarios" En *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* 1:190-196.

Itzcovich, H. 2005. Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones. (Libros del Zorzal. Buenos Aires).

Mántica, A. 2006. “Analizando errores geométricos”. En *La matemática. Aportes para su enseñanza*. 87-97. (Ediciones UNL. Argentina).

Mántica, A. y Carbó, A. 2007. “¿Qué papel juegan las construcciones en el aprendizaje de los conceptos geométricos?” *Actas del IENEM*. Tandil.

Mántica, A. y Carbó, A. 2009. “Definiciones y propiedades de cuadriláteros en futuros docentes de nivel inicial. Un estudio de casos”. En *La geometría en el triángulo de las bermudas. Reflexiones y aportes para recuperarla en el aula*. Ediciones UNL (En prensa)

Marrades, R. y Gutiérrez, A. 2000. “Proofs produced by secondary school students learning Geometry in a dynamic computer environment”. *Educational Studies in Mathematics*. 44: 87-125.

Sowder, L. y Harel, G. 1998 “Types of Students´justifications”. *The mathematics teacher*. 91(8): 670-676.

Villella, J. 2001. Uno, dos, tres… Geometría otra vez. De la intuición al conocimiento formal en la EGB. (AIQUE. Buenos Aires).